Statystyka
Lista 4

Zad 1. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie schematem Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu θ. Obliczyć warunkowy rozkład prawdopodobieństwa zmiennych losowych $X_1, ..., X_n$ przy danym $S = s$, gdzie $S = \sum_{i=1}^n X_i$ jest liczbą sukcesów. Zinterpretować fakt, że statystyka S jest dostateczna.

Zad 2. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbką z rozkładu Poiss(θ). Obliczyć warunkowy rozkład prawdopodobieństwa zmiennych losowych $X_1, ..., X_n$ przy danym $S = s$, gdzie $S = \sum_{i=1}^n X_i$ jest liczbą sukcesów. Zinterpretować fakt, że statystyka S jest dostateczna.

Zad 3. Wyznaczyć estymator największej wiarygodności dla n-elementowej próbki z rozkładu

a) wykładniczego *b*) Poissona *c*) normalnego *d*) jednostajnego

i porównać go z estymatorem otrzymanym metodą momentów.

Zad 4. Niech $X \sim \mathcal{B}(n, \theta)$ będzie liczbą sukcesów w schemacie Bernoulliego. Obliczyć i porównać błąd średniokwadratowy dwóch estymatorów: θ: $\widehat{\theta} = \dfrac{X}{n}$, $\widetilde{\theta} = \dfrac{X+1}{n+2}$.

Zad 5 (Twierdzenie Fishera)**.** Pokazać, że jeżeli $X_1, ..., X_n$ jest próbką z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, to zmienne losowe

$$\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \quad \text{i} \quad S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

są niezależne oraz $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ i $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$. Wyciągnąć stąd wniosek, że $\mathbb{E}(S^2) = \sigma^2$ oraz $\mathrm{Var}(S^2) = \frac{2}{n-1}\sigma^4$.

Zad 6. Porównać obciążenie i błąd średniokwadratowy dla estymatora S^2 wariancji rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ z zadania 5 oraz estymatora $\tilde{S}^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ otrzymanego za pomocą metody momentów.

Zad 7. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbką z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$. Dobrać stałą c tak, aby cS był estymatorem nieobciążonym odchylenia standardowego, gdzie S^2 jest estymatorem wariancji z zadania 5 oraz $S = \sqrt{S^2}$.

Zad 8. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbką z rozkładu Poiss(λ). Szacujemy prawdopodobieństwo $g(\lambda) = \mathbb{P}_\lambda(X_1 = 0) = e^{-\lambda}$ używając dwóch estymatorów $\widehat{g}_1 := e^{-\overline{X}}$ oraz $\widehat{g}_2 := \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n\bar{X}}$, gdzie $\bar{X}$ jest średnią z próby. Obliczyć obciążenia estymatorów $\widehat{g}_1$ oraz $\widehat{g}_2$.

Zad 9. Niech $(X_1, X_2, ..., X_n)$ będzie próbką z nieznanego rozkładu o wartości oczekiwanej μ wariancji σ^2.

a) Pokazać, że statystyka

$$T(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^n a_i X_i, \qquad \text{gdzie } \sum_{i=1}^n a_i = 1, \tag{1}$$

jest nieobciążonym estymatorem μ.

b) Obliczyć wariancję T.

c) Wykazać, że w klasie estymatorów postaci (1), estymator T minimalizuje wariancję wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i = 1/n$, $i = 1, \ldots, n$.